

ГОЛОВНЕ УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ ЧЕРКАСЬКОЇ  
ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ  
ЧЕРКАСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ОСВІТИ  
ПЕДАГОГІЧНИХ ПРАЦІВНИКІВ

*Козлова О.М.,  
Шершнєва О.О.*

**Властивості функцій та їх  
застосування до розв'язування  
алгебраїчних задач**

*матеріали до спецкурсу для класів  
природничого та фізико-математичного  
профілю*

**Черкаси 2008**

## **Автори:**

**Козлова Ольга Миколаївна**, методист лабораторії природничо-математичних дисциплін Черкаського ОПОПП

**Шершнєва Ольга Олексіївна**, старший вчитель, вчитель математики Корсунь-Шевченківського ліцею

## **Рецензенти:**

**Роцин Юрій Ростиславович**, кандидат фізико - математичних наук ФДП НТУУ «КПІ»

**Пивоварова Наталія Олексіївна**, вчитель-методист Корсунь-Шевченківської гімназії

*Посібник містить програму спецкурсу з теми «Властивості функцій», основні теоретичні відомості, понад 30 задач, систематизованих за способами застосування різних властивостей функцій: області визначення та множини значень, парності, монотонності тощо, задачі для самостійного розв'язання. Спецкурс призначений для фізико-математичних класів та класів природничого профілю.*

*Даний посібник допоможе в роботі факультативів, олімпіадних груп.*

Рекомендовано до друку вченою радою ОПОПП.

Протокол №2 від 16 травня 2007р.

Видання друге, доповнене

Видання підготовлено до друку та віддруковано редакційно-видавничим відділом ЧОПОПП.

Зам. №794. Тираж 100 пр.

18003, Черкаси, вул. Бидгощська, 38/1.

# ЗМІСТ

I. Програма спецкурсу «Властивості функцій та їх застосування до розв'язування алгебраїчних задач»

II. Пояснювальна записка

III. Теоретичні відомості до теми «Властивості функцій та застосування їх до розв'язування алгебраїчних задач»

IV. Методичні матеріали до окремих тем спецкурсу:

1. Застосування області визначення та множини значень.
2. Використання обмеженості функцій.
3. Використання властивостей монотонності функцій.
4. Розв'язування задач з парними та непарними функціями.
5. Розв'язування задач графічним способом.

V. Вправи для самостійної роботи

VI. Використана література

**I. Програма спецкурсу «Властивості функцій та їх застосування до розв'язування алгебраїчних задач»  
(Всього 17 год.)**

№	Тема	Кількість годин	Лекція	Практичні заняття	Семинар	Залік	Основні вимоги
1.	<i>Тема №1.</i> Функції та їх властивості. Означення функції. Способи завдання функції. Класифікація функцій.	1	1				<u>Повинні знати:</u> означення функції, способи завдання функції, класифікації функцій. <u>Повинні розуміти:</u> важливість функціональної залежності для математики та інших наук. <u>Повинні вміти:</u> задавати функції різними способами (табличний, графічний, аналітичний), застосовувати функції до моделювання реальних процесів, класифікувати функції відповідно до їх виду.
2.	<i>Тема №2.</i> Область визначення функції дійсного аргументу.	2	1	1			<u>Повинні знати:</u> означення області визначення. <u>Повинні розуміти:</u> поняття області визначення функціональної залежності для розв'язування рівнянь та нерівностей. <u>Повинні вміти:</u> знаходити область визначення функції різними способами.
3.	<i>Тема №3.</i> Множина значень функції.	2		1	1		<u>Повинні знати:</u> означення множини значень функції, її важливість для розв'язування рівнянь і нерівностей. <u>Повинні розуміти:</u> важливість поняття множини значень функції для розв'язування математичних задач. <u>Повинні вміти:</u> знаходити значення функції при заданих

						значеннях аргументу, за яких функція набуває даного значення; розв'язувати рівняння і нерівності, що ґрунтуються на знаходженні області значення.
4.	Тема №4. Властивості функцій.	2	1	1		<p><u>Повинні знати:</u> означення парних (непарних), періодичних функцій, та способи їх визначення.</p> <p><u>Повинні розуміти:</u> важливість різних аспектів парності(непарності), періодичності функцій.</p> <p><u>Повинні вміти:</u> визначати парність складних алгебраїчних функцій; знаходити період функцій, використовувати властивості парності функції під час розв'язування рівнянь та нерівностей; встановлювати за побудованим графіком парність функцій.</p>
5.	Тема №5. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень. Побудова графіків функцій, що містять модуль.	3	1	1	1	<p><u>Повинні знати:</u> основні алгоритми геометричних перетворень графіків функцій.</p> <p><u>Повинні розуміти:</u> послідовність побудови складених графіків функцій; особливості побудови графіків функцій, що містять модуль.</p> <p><u>Повинні вміти:</u> зображувати та розпізнавати графіки функцій, застосовувати геометричні перетворення, встановлювати за графіком функції її найважливіші властивості.</p>
6.	Тема №6. Дослідження функцій на монотонність та екстремуми.	3	1	1	1	<p><u>Повинні знати:</u> означення кусково-монотонної функції; алгоритм дослідження функції на монотонність та екстремуми.</p> <p><u>Повинні розуміти:</u> значення вивчення монотонності функції для дослідження функції.</p> <p><u>Повинні вміти:</u> застосовувати похідну для знаходження</p>

							проміжків монотонності та екстремумів функції; знаходити найбільше та найменше значення функції; доводити нерівності за допомогою властивостей монотонності функції.
7.	Тема №7. Застосування властивостей функцій до розв'язування алгебраїчних задач.	4	1	1	1	1	<u>Повинні знати:</u> властивості функцій та їх практичне використання для розв'язання алгебраїчних задач. <u>Повинні розуміти:</u> важливість аналізу алгебраїчної задачі для визначення необхідної властивості функції з метою її розв'язання. <u>Повинні вміти:</u> розв'язувати рівняння та нерівності, доводити нерівності, порівнювати числа, використовуючи властивості функції.

## II. Пояснювальна записка

Функції та функціональні залежності в шкільному курсі математики є потужним засобом розвитку як інтелектуальних, так і творчих здібностей, оригінальності мислення учнів.

Застосування функцій при розв'язуванні алгебраїчних задач надає можливість розвивати оперативність та варіативність мислення, його незаалгоритмізованість, гнучкість, оригінальність, математичну уяву та інтуїцію, здатність прогнозувати.

Основною метою вивчення спецкурсу «Властивості функцій та застосування їх до розв'язування алгебраїчних задач» є формування та розвиток творчого мислення учнів, глибоке усвідомлення навчального

матеріалу, формування здатності застосовувати знання у нестандартних умовах.

Спецкурс «Властивості функцій та застосування їх до розв'язування алгебраїчних задач» покликаний показати застосування різних властивостей функцій (області визначення, значення, парності, монотонності...) для порівняння чисел, розв'язування рівнянь та нерівностей, доведення нерівностей тощо, що сприяє підвищенню рівня творчої самостійності учнів, формуванню навичок дослідницької діяльності.

Спецкурс «Властивості функцій та застосування їх до розв'язування алгебраїчних задач» пропонується для учнів фізико-математичних класів та класів природничого профілю (10-11 класи). Його вивчення розраховано на 17 годин, тижневе навантаження – 1 година протягом одного півріччя.

### III. Теоретичні відомості до теми «Властивості функцій та застосування їх до розв'язування алгебраїчних задач»

Функцією  $y = f(x)$  називається така відповідність між множинами  $D$  і  $E$ , при якій кожному значенню змінної  $x$  відповідає одне й тільки одне значення змінної  $y$ .

При цьому вважають, що:

$x$  — незалежна змінна або аргумент;

$y$  — залежна змінна або функція;

$f$  — символ закону відповідності;

$D$  — область визначення функції;

$E$  — множина значень функції.

#### Загальні властивості функцій

Множина всіх значень аргумента, для яких можна обчислити значення функції, називається природною областю визначення функції. Область визначення може бути заданою; у цьому випадку вона залежить також від умови задачі.

Функція  $y = f(x)$  називається парною (непарною), якщо для будь-якого  $x \in D$  виконується умова  $f(-x) = f(x)$  ( $f(-x) = -f(x)$ ).

Функція буде ні парною, ні непарною, якщо для  $x \in D$ ,  $f(-x) \neq \pm f(x)$ .

Функція  $y = f(x)$  називається періодичною, якщо для  $x \in D$  виконується умова  $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$ , де число  $T$  — період функції.

Функція  $y = f(x)$  називається обмеженою на множині  $D$ , якщо для всіх  $x \in D$  виконується умова  $|f(x)| \leq M$ , де  $M > 0$  — деяке скінченне число.

Функція  $y = f(x)$  називається монотонно зростаючою (спадною) на множині  $D$ , якщо для всіх  $x \in D$  більшому значенню аргумента відповідає більше (менше) значення функції, тобто  $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$  ( $f(x_2) < f(x_1)$ ).

#### Термінологічний словник ключових понять:

**Функція** — це така відповідність між множинами  $D$  та  $E$ , при якій кожному значенню змінної  $x \in D$  відповідає одне й тільки одне значення  $y = f(x)$ .



**Область визначення функції ( $D$ )** — це множина всіх тих значень, які може приймати аргумент.

## **IV. Методичні матеріали до окремих тем спецкурсу**

### **1. Застосування області визначення та множини значень**

Розглянемо рівняння виду  $f(x) = \varphi(x)$ . Нехай множини значень для функцій  $y = f(x)$  та  $y = \varphi(x)$  будуть відповідно  $E(f)$  і  $E(\varphi)$ .

Коли області  $E(f)$  та  $E(\varphi)$  мають спільні елементи, то рівняння може мати корені. У разі відсутності таких, можна стверджувати, що коренів немає.

#### **Приклад 1.**

**Розв'язати рівняння:**  $2^{\cos x} = \cos x + \frac{1}{\cos x}$

**Розв'язання.**

Нехай  $f(x) = 2^{\cos x}$ ; та  $\varphi(x) = \cos x + \frac{1}{\cos x}$ .

$E(f) = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$ , а  $E(\varphi) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ ; (як сума  $2^x$  обернених функцій)

$$E(f) \cap E(\varphi) = \{2\}, \text{ то маємо систему: } \begin{cases} 2^{\cos x} = 2; \\ \cos x + \frac{1}{\cos x} = 2; \end{cases} \Rightarrow \cos x = 1$$

Отже,  $x = 2\pi n; n \in Z$

**Відповідь:**  $2\pi n; n \in Z$

#### **Приклад 2.**

**Розв'язати рівняння:**  $3^{\sqrt{x+2}} + 3^{\sqrt{x+3}} + 3^{\sqrt{x+6}} = 3^2$ ;

**Розв'язання.**

Розглянемо функцію  $f(x) = 3^{\sqrt{x+2}} + 3^{\sqrt{x+3}} + 3^{\sqrt{x+6}}$ ,

$$D(f) = [-2; +\infty)$$

$$E(f) = [13; +\infty).$$

$$\varphi(x) = 3^2; \quad E(\varphi) = 9;$$

$$E(f) > 9, \text{ тобто } E(\varphi) \cap E(f) = \emptyset$$

Тому, можна стверджувати, що  $x \in \emptyset$ .

**Відповідь:**  $\emptyset$ .

#### **Приклад 3.**

**Розв'язати рівняння:**  $2 \cos^2 \frac{x^2 + x}{6} = 2^x + 2^{-x}$ . (3).

**Розв'язання:**

Нехай  $y=2^x + 2^{-x}$ , де  $2^x > 0$ . Оцінюючи область значення цієї функції, неважко помітити, що  $E(y)=[2; \infty)$ .

У цей же час правильна нерівність  $g(x)=2\cos^2\frac{x^2+x}{6}$ , то  $E(g)=[0;2]$ . Отже,

задане рівняння зводиться до системи рівнянь: 
$$\begin{cases} 2\cos^2\frac{x^2+x}{6} = 2; \\ 2^x + 2^{-x} = 2 \end{cases}$$

З другого рівняння системи знаходимо  $x=0$ . Бачимо, що  $x=0$  задовольняє і перше рівняння системи, то  $x=0$  – корінь системи, і корінь заданого рівняння  
**Відповідь:** 0.

**Приклад 4.**

**Розв'язати рівняння:** 
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+4x+7} = \sqrt{3}\frac{1}{\sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)} \quad (4)$$

**Розв'язання.** Після перетворень маємо:  $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x^2+4x+7} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3}$ .

Так як  $0 < \frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \frac{\pi}{3}$ , а на проміжку  $(0; \frac{\pi}{3}]$  функція  $y = \operatorname{tg}x$  зростає, то

$$\operatorname{tg}0 < \operatorname{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}, \text{ тобто: } \operatorname{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3} \leq \sqrt{3} \quad (5).$$

Отже, права частина рівняння (4) повинна бути додатною.

Більше того, оскільки  $\sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right) \leq 1$ , маємо  $\sqrt{3}\frac{1}{\sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)} \geq 3 \quad (6).$

Нерівності(5) та (6) об'єднаємо в систему: 
$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\pi}{(x+2)^2+3} = \sqrt{3} \\ \sqrt{3}\frac{1}{\sin\left(\pi+\frac{\pi x}{4}\right)} = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Перше рівняння системи виконується тільки при  $x = -2$ .

Оскільки цей корінь задовольняє і друге рівняння системи, то  $x = -2$  – єдиний корінь рівняння.

**Відповідь:** -2.

**Приклад 5.**

**Розв'язати нерівність**  $\sqrt{2+x-x^2} > x^3-9$ .

**Розв'язання.** Переписавши нерівність у вигляді  $\sqrt{-(x-2)(x+1)} > x^3-9$ , ми знайдемо, що областю визначення функції, розташованої у лівій частині

цієї нерівності, є відрізок  $-1 \leq x \leq 2$ , причому в усіх точках своєї області визначення ця функція невід'ємна (так як кожне її значення являє собою арифметичний корінь з невід'ємного числа).

Але при  $-1 \leq x \leq 2$  права частина від'ємна, і тому записана нерівність має розв'язки при всіх  $x$  з проміжку  $-1 \leq x \leq 2$ . Таким чином, розв'язками нерівності є всі числа з проміжку  $[-1; 2]$ .

**Відповідь:**  $[-1; 2]$

### Приклад 6.

**Розв'язати рівняння**  $\sin \frac{\pi x}{2} = x^2 - 2x + 2$ .

**Розв'язання.** Оцінимо області зміни лівої та правої частини рівняння.

Нехай  $y(x) = \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|$ , то  $E(y) = [0; 1]$ .

$g(x) = x^2 - 2x + 2$ , то  $E(g) = [1; \infty]$ , то  $E(y) \cap E(g) = 1$

Отже, області зміни лівої і правої частин мають одне спільне значення – 1, тому задане рівняння рівносильне системі :

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} = 1, \\ x^2 - 2x + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi x}{2} = \frac{4k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

**Відповідь:** 1.

### Приклад 7.

**Розв'язати рівняння:**  $\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)(2 - \sin^6 x) = 7 + \cos 2y$ .

**Розв'язання.** Оцінимо області зміни лівої і правої частин рівняння:

$$1) 5 + \frac{3}{\sin^2 x} \geq 8; \quad 2) 1 \leq 2 - \sin^6 x \leq 2 \Rightarrow$$

$$\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)(2 - \sin^6 x) \geq 8; \quad 6 \leq 7 + \cos 2y \leq 8.$$

Порівнюючи одержані значення, знаходимо, що області зміни лівої і правої частин мають лише одне спільне значення 8. Отже, вихідне рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} \left(5 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)(2 - \sin^6 x) = 8, \\ 7 + \cos 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 + \frac{3}{\sin^2 x} = 8, \\ 2 - \sin^6 x = 1, \\ \cos 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ \cos 2y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sin^2 x = 0, \\ \cos 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 0, \\ \cos 2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ y = l\pi, l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } \{(x; y)\} = \left\{ \left( \frac{\pi}{2} + k\pi; l\pi \right), k, l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

## 2. Використання обмеженості функцій

Часто в процесі розв'язування задач, зокрема тригонометричних, логарифмічних та показникових, властивість обмеженості функції зверху або знизу відіграє важливу роль у пошуку правильного розв'язання.

### Приклад 8.

**Побудувати графік:**  $y = \sqrt{\log_2(\sin 2x)}$ ;

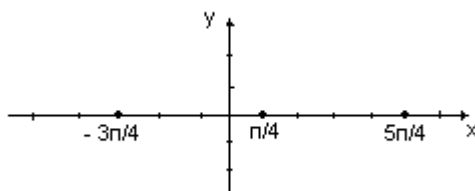
### Розв'язання.

Розглянемо функцію  $f(x) = \log_2(\sin 2x)$ ,  $0 < \sin 2x \leq 1$ , тобто маємо справу з обмеженням  $\sin 2x$  зверху та знизу. Нехай  $\sin 2x = Z$

Враховуючи невід'ємність підкореневого виразу та обмеженість  $\sin 2x$  маємо  $\sin 2x = 1, y = 0$

Отже, графік функції  $y = \sqrt{\log_2 \sin(2x)}$

є множина точок  $\{(x; y)\} = \left\{ \left( \frac{\pi}{4} + \Pi n; 0 \right) \right\}, n \in \mathbb{Z}$ .



### Приклад 9.

**Розв'язати нерівність:**  $\log_2(1 + \sqrt{x^2 + x^4}) + \log_2(1 + x^6) \leq 0$ ;

### Розв'язання:

Для будь яких дійсних  $x$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

$\log_2(1 + \sqrt{x^2 + x^4}) \geq 0$  та  $\log_2(1 + x^6) \geq 0$ ;

Тому маємо систему: 
$$\begin{cases} \log_2(1 + \sqrt{x^2 + x^4}) = 0, \\ \log_2(1 + x^6) = 0, \end{cases} \Rightarrow x = 0.$$

### Приклад 10.

**Розв'язати рівняння:**  $5^{|1-4x^2|} = \sin \Pi x$ ;

### Розв'язання:

Оскільки  $5 > 1$ , та  $|1 - 4x^2| \geq 0$  тоді  $5^{|1-4x^2|} \geq 1$ .

Але  $\sin \pi x \leq 1$ . Отже, дане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} 5^{|1-4x^2|} = 1, \\ \sin \pi x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} |x| = \frac{1}{2}, \\ x = 2k + \frac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad (\text{при } k = 0),$$

при  $k \neq 0, x = \emptyset$ .

Відповідь:  $\frac{1}{2}$ ;

### Приклад 11.

**Розв'язати рівняння**  $\sin x + 2\sin 2x = 4 + \sin 17x$ . (7).

**Розв'язання:** Так як  $\sin x \leq 1, \sin 2x \leq 1$ , то  $\sin x + 2\sin 2x \leq 3$ . Більше того,  $\sin x + 2\sin 2x < 3$ . Розглянемо рівняння  $\sin x + 2\sin 2x = 3$ . Така рівність може мати місце тоді і тільки тоді, коли  $\sin x = 1$  і  $\sin 2x = 1$ , що неможливо, тому що  $\sin x = 1$  при  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , а при цих значеннях маємо:

$$\sin 2x = \sin 2\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \sin(\pi + 4\pi k) = 0$$

Отже,  $\sin x + 2\sin 2x < 3$ . У цей же час права частина рівняння (7) задовольняє нерівність  $4 + \sin 17x \geq 3$ . Таким чином, можна зробити висновок, що рівняння (7) не має розв'язків.

### Приклад 12.

**Розв'язати рівняння**  $\sin 3x + \sin 11x = 2$ .

**Розв'язання:** Розглянемо функції  $y(x) = \sin 3x; g(x) = \sin 11x$ ;

Оскільки  $E(y) = [-1; 1]$

$E(g) = [-1; 1]$ , то  $y(x) + g(x) = 2$

Рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} \sin 3x = 1, \\ \sin 11x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{4k+1}{2}\pi, \\ 11x = \frac{4l+1}{2}\pi \end{cases} \quad k, l \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4k+1}{6}\pi, \\ x = \frac{4l+1}{22}\pi. \end{cases}$$

Для знаходження розв'язків системи потрібно розв'язати діофантове рівняння  $\frac{4k+1}{6}\pi = \frac{4l+1}{22}\pi$

$$11(4k+1) = 3(4l+1) \Leftrightarrow 12l = 44k + 8 \Leftrightarrow$$

$$3l = 11k + 2 \Leftrightarrow l = \frac{11k+2}{3} = \frac{11(3m+2)+2}{3}$$

Отже, система має розв'язки при  $k = 3m + 2, m \in \mathbb{Z}$ .

Ці розв'язки ми одержимо, підставивши одержане значення  $k$  у перше рівняння системи

$$x = \frac{4(3m+2)+1}{6}\pi = \frac{12m+9}{6}\pi = \frac{3}{2}\pi + 2m\pi \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь: } x \in \left\{ \frac{1}{2}\pi + (2m+1)\pi, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

### Приклад 13.

**Розв'язати рівняння**  $\sin^8 x + \cos^7 x = 1$ .

**Розв'язання.** Маємо справу з синусом та косинусом одного аргументу. Враховуючи обмеженість заданих функцій, розглянемо спочатку значення  $x$  такі, що  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  (це точки, у яких  $\sin x$  і  $\cos x$  не набувають значення 0 чи  $\pm 1$ ). Для всіх таких значень  $x$  справедливі нерівності:

$$\sin^8 x < \sin^2 x \text{ і } \cos^7 x < \cos^2 x.$$

Додаючи ці нерівності почленно, одержимо наслідок

$$\sin^8 x + \cos^7 x < 1.$$

Отже, дане рівняння не має розв'язків серед точок  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Таким чином, розв'язки даного рівняння потрібно шукати лише серед точок

$x = \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Для цих точок можливі такі випадки:

$$\begin{cases} \sin^8 x = 1, \\ \cos^7 x = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \sin^8 x = 0, \\ \cos^7 x = 1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \sin^8 x = 0, \\ \cos^7 x = -1. \end{cases}$$

Вихідному рівнянню задовольняють лише перші дві системи. Отже, задане рівняння рівносильне сукупності рівнянь:

$$\begin{cases} \sin^8 x = 1, \\ \cos^7 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1, \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + l\pi, \\ x = 2l\pi \end{cases} \quad l \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Відповідь: } x \in \left\{ \frac{\pi}{2} + l\pi; 2l\pi, l \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Приклад 14.** При яких значеннях параметра  $a$  з інтервала  $(2;5)$  нерівність  $\log_2 |3 - |\sin ax|| = \cos(\pi x - \frac{\pi}{6})$  має розв'язання на відрізку  $[2; 3]$ ?

**Розв'язання:** Оцінивши області значень функцій  $y = \log_2 |3 - |\sin ax||$  та  $y = \cos(\pi x - \frac{\pi}{6})$ , отримаємо:  $\log_2 |3 - |\sin ax|| \geq \log_2 2 = 1$ ,  $\cos(\pi x - \frac{\pi}{6}) \leq 1$ , то початкове рівняння рівносильне системі рівнянь:

$$\begin{cases} \log_2 |3 - |\sin ax|| = 1, \\ \cos(\pi x - \frac{\pi}{6}) = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\sin ax| = 1 \\ x = \frac{1}{6} + 2k \end{cases}$$

З чисел виду  $\frac{1}{6} + 2k$  проміжку  $[2; 3]$  належить тільки  $\frac{1}{6} + 2$ , тобто  $x = \frac{13}{6}$ . При цьому значенні перше рівняння системи приймає вид  $\left| \sin \frac{13a}{6} \right| = 1$ ,

$$\text{звідки } \frac{13a}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad a = \frac{3\pi + 6\pi n}{13}.$$

Залишилось серед цих значень вибрати те, яке належить інтервалу  $(2;5)$ . Такими будуть  $a_1 = \frac{9\pi}{13}$ , (при  $n=1$ ) та  $a_2 = \frac{15\pi}{13}$  (при  $n=2$ ). Отже, умовам задачі задовольняють значення параметра  $a \in \left\{ \frac{9\pi}{13}; \frac{15\pi}{13} \right\}$

**Відповідь:**  $\frac{9\pi}{13}; \frac{15\pi}{13}$ .

### 3. Використання властивостей монотонності функцій

Нехай потрібно розв'язати рівняння виду  $f(x) = a$ . Якщо функція  $f(x)$  зростаюча (спадна), то дане рівняння може мати не більше одного кореня. Необхідною і достатньою умовою існування хоча б одного кореня є умова, що  $a \in E(f)$ .

#### Приклад 15.

**Розв'язати рівняння:**  $2^x + 3^x + 4^x + 5^x = 54$ ;

**Розв'язання:** Функція  $f(x) = 2^x + 3^x + 4^x + 5^x$  - зростаюча (як сума зростаючих функцій).  $E(f) = (0; +\infty)$ . Оскільки  $54 \in E(f)$ , то рівняння має не більше одного кореня. Легко переконатись, що ним буде  $x=2$ .

#### Приклад 16. Розв'язати рівняння $\sqrt{7-x} = x - 1$

**Розв'язання :** Щоб розв'язати рівняння  $\sqrt{7-x} = x - 1$ , немає необхідності підносити обидві частини рівняння до квадрату. Достатньо помітити, що  $x = 3$  - корінь рівняння та інших коренів немає, тому що ліва частина рівняння - спадаюча, а права - зростаюча функція.

**Відповідь:** 3.

#### Приклад 17. Розв'язати нерівність $\sqrt{x+18} < 2 - x$ .

**Розв'язання :** Аналізуючи дану нерівність помічаємо, що при  $x = -2$  ліва і права частини рівні, але ліва частина - зростаюча, а права - спадаюча функція, то нерівність задовольняють значення  $x$ , які менше  $-2$ . З використанням області визначення маємо :  $-18 \leq x < -2$ .

**Відповідь:**  $[-18; -2]$

#### Приклад 18.

**Довести нерівність:**  $\ln(1+x) < x$ , де  $x > 0$ ;

**Доведення:**

Розглянемо функцію  $y = \ln(1+x) - x$ ,  $x > 0$

$$y' = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{1-1-x}{1+x} = \frac{-x}{1+x} < 0;$$

Тобто функція спадаюча  $y(0)=0$ , то  
 $y(x) = \ln(1+x) - x < 0 \Rightarrow \ln(1+x) < x$ .

### Приклад 19.

**Розв'язати рівняння:**  $\sqrt[28]{x-243} + \sqrt[5]{x} = \frac{3}{\sqrt[7]{x-242}}$ .

**Розв'язання:**

ОДЗ:  $x \geq 243$ .

Розглянемо дві функції:  $f_1(x) = \sqrt[28]{x-243} + \sqrt[5]{x}$  та  $f_2(x) = \frac{3}{\sqrt[7]{x-242}}$ .

Функція  $f_1(x) = \sqrt[28]{x-243} + \sqrt[5]{x}$  зростаюча і при  $x=243$  набуває найменшого значення:  $f_1(243) = 3$ . Розглянувши функцію  $f_2(x) = \frac{3}{\sqrt[7]{x-242}}$ , бачимо, що вона спадна на ОДЗ. При  $x=243$  досягає найбільшого значення  $f_2(243) = 3$ .

Отже,  $f_1(243) = f_2(243) = 3$ , тобто  $x=243$  – єдиний корінь.

**Відповідь: 243.**

**Приклад 20.** Що більше  $100^{101}$  чи  $101^{100}$  ?

**Розв'язання.**

Запишемо нерівність  $100^{101} < 101^{100}$  і добудемо із обох частин корінь степеня  $100 \cdot 101$ , після чого вона набуде вигляду:

$$100^{1/100} < 101^{1/101}, \text{ або } f(100) < f(101),$$

де  $f(x) = x^{1/x}$ .

Введена функція  $f(x)$  є степенево-показниковою, оскільки змінна  $x$  у виразі  $f(x)$  входить і до основи, і до показника степеня, а формулами для диференціювання ми не володіємо. Тому застосуємо інший шлях: розглянемо функцію

$$g(x) = \ln f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Зрозуміло, що функція  $g$  зростає на деякій множині тоді і тільки тоді, коли функція  $f$  зростає на цій множині. Маємо:

$$g'(x) > 0, \quad \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0, \quad x < e,$$

тому на інтервалі  $(3; +\infty)$  виконується нерівність  $g'(x) < 0$ , тобто функція  $g(x)$  зростає, а з цього слідує, що і функція  $f(x)$  зростає.

$$f(100) > f(101), \text{ на кінець, } 100^{101} > 101^{100}.$$

**Приклад 21.** Чи правильно, що:  $\cos 1980 < 1 + \cos 1981$  ?

**Розв'язання.** Перепишемо дану нерівність у вигляді  $1980 + \cos 1980 < 1981 + \cos 1981$ , або



$f(1980) < f(1981)$ , де  $f(x) = x + \cos x$ .

Тоді  $f'(x) > 0$ ,  $1 - \sin x > 0$ , і тому функція  $f$  зростає на будь-якому проміжку, який не має коренів прирівнювання  $\sin x = 1$ .

Доведемо, що  $f(x)$  зростає на всій множині  $\mathbb{R}$  дійсно, якщо числа  $a$  і  $b$  лежать на сусідніх проміжках

$$a \in \left( \frac{\pi}{2} + 2(k-1)\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right),$$

$$b \in \left( \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi \right).$$

тому, по доведеному, на кожному із цих проміжків функція  $f(x)$  зростає, а із неперервності  $f(x)$  слідує нерівність  $f(a) < f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) < f(b)$ , і, тому,  $f(a) < f(b)$ .

Якщо ж  $a$  і  $b$  лежать не на сусідніх проміжках між коренями рівняння  $\sin x = 1$ , то нерівність  $f(a) < f(b)$  встановлюється послідовним застосуванням тільки що доведеного твердження.

На кінець отримуємо, що  $f(1980) < f(1981)$ , отже дана в умові нерівність правильна.

**Приклад 22.** Розв'язати рівняння  $\sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2} = 4 + \sqrt{3-x}$ .

**Розв'язання.** Методом підбору знаходимо корінь рівняння  $x = 2$ . Так як в області визначення рівняння, тобто на проміжку  $[1;3]$ , функція  $y = \sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2}$  зростає, а функція  $y = 4 + \sqrt{3-x}$  спадає, то інших коренів рівняння не має. Отже  $x = 2$  єдиний корінь рівняння.

**Приклад 23.** Розв'язати нерівність  $(8-x)^{\log_2^3(8-x)} \leq 2^{3x-4}$

**Розв'язання.** Так як область визначення нерівності задається нерівністю  $8-x > 0$ , тобто  $x < 8$ , то, прологарифмувавши обидві частини заданої нерівності, маємо рівносильну їй нерівність  $\log_2(8-x)^{\log_2^3(8-x)} \leq \log_2 2^{3x-4}$ , тобто  $\log_2^3(8-x) \leq 3x-4$ .

Рівність  $\log_2^3(8-x) = 3x-4$  виконується при  $x=4$ . Оскільки функція  $y = \log_2^3(8-x)$  спадає, а функція  $y = 3x-4$  зростає, робимо висновок, що нерівність  $\log_2^3(8-x) \leq 3x-4$  виконується при  $x \geq 4$  (мал. 5.). Отже,  $[4;8)$  - розв'язок нерівності (5).

**Приклад 24.** Довести, що  $4\operatorname{tg}5^\circ \operatorname{tg}9^\circ < 3\operatorname{tg}6^\circ \operatorname{tg}10^\circ$ .

**Доведення :**

Розглянемо функцію  $f(x) = \frac{\operatorname{tg}x}{x}$ ,  $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

Тоді  $f'(x) > 0$ ,  $\frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}x > 0$ ,  $x - \sin x \cos x > 0$ ,  $2x > \sin 2x$ ,

$f(x)$  - зростаюча функція. Тому

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{180}}{\frac{5\pi}{180}} < \frac{\operatorname{tg} \frac{6\pi}{180}}{\frac{6\pi}{180}}, \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{9\pi}{180}}{\frac{9\pi}{180}} < \frac{\operatorname{tg} \frac{10\pi}{180}}{\frac{10\pi}{180}}, \quad \text{або} \quad 6\operatorname{tg}5^\circ < 5\operatorname{tg}6^\circ, \quad 10\operatorname{tg}9^\circ < 9\operatorname{tg}10^\circ.$$

Перемноживши ці нерівності, отримали нерівність, яку потрібно було довести.

#### 4. Розв'язування задач з парними та непарними функціями

Щоб знайти розв'язки рівняння  $f(x)=0$ , де  $f(x)$  – парна (непарна) функція, достатньо знайти його корені для  $x>0$ , або  $x<0$ , а потім об'єднати їх із симетричними коренями. Крім цього виконати перевірку  $x=0$ . Взагалі, коли необхідна перевірка, то її здійснюють для одного із симетричних коренів.

**Приклад 25. Розв'язати рівняння:**  $2^{|x|} = |x+1| + |x-1|$ ;

**Розв'язання:** Нехай,  $f(x) = 2^{|x|} - (|x+1| + |x-1|)$ .

Функція  $f(x)$  парна, як різниця парних функцій.

Розглянемо рівняння для  $x>0$ :

$$|x+1| + |x-1| = \begin{cases} 2, & 0 < x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases} \quad \text{Тому маємо: } \begin{cases} 2^x = 2 \\ 2^x = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ x = 2; \end{cases}$$

Приєднаємо до знайдених коренів їм симетричні  $-1$ ;  $-2$ .

Число  $0$  не є коренем рівняння.

**Відповідь:**  $\pm 1; \pm 2$ .

**Приклад 26.** При яких значеннях параметра  $a$  рівняння  $a^2(1+2|x|) = 6 - 5a \cos \pi x$  має єдиний розв'язок? Знайти цей розв'язок.

**Розв'язання:**

Функція  $f(x) = a^2(1+2|x|) = 6 - 5a \cos \pi x$  при всіх значеннях параметра  $a$  є парною відносно  $x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Якщо число  $x_0=0$  розв'язком даного рівняння, то  $-x_0$  також буде розв'язком. Отже, єдиним може бути розв'язок  $x=0$ . Знайдемо значення параметра  $a$ , при яких рівняння не має інших розв'язків, крім  $x=0$ . Підставимо значення  $x=0$  у рівняння  $a^2+5a-6=0$ , яке має корені  $a=-6$  і  $a=1$ .

Якщо  $a=-6$ , то дане рівняння має вигляд  $30 \cos \pi x = 30 + 72|x| \Leftrightarrow \cos \pi x = 1 + \frac{12}{5}|x|$ .

Це рівняння інших коренів, крім  $x=0$ , не має, оскільки  $\cos \pi x \leq 1$ , а  $1 + \frac{12}{5}|x| > 1$ , при  $x \neq 0$ .

Якщо  $a=1$ , то дане рівняння має вигляд  $5 \cos \pi x = 5 - 2|x| \Leftrightarrow \cos \pi x = 1 - \frac{2}{5}|x|$  і може мати інші корені, крім  $x=0$ , наприклад  $x = \pm \frac{5}{2}$ . Тому значення  $a=1$  не задовольняє умову задачі.

**Відповідь:**  $a=-6, x=0$ .

### 5. Розв'язування задач графічним способом

Часом для розв'язання рівняння  $f_1(x)=f_2(x)$  корисно побудувати графік функцій  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$  і визначити абсциси точок їх перетину.

Якщо  $x_0$  – розв'язок цього рівняння, то це означає, що точка  $x_0$  належить області визначення кожної із функцій  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$  і виконується рівність  $f_1(x)=f_2(x)$ . Позначимо число  $f_1(x_0)$  через  $y_0$ , так що  $y_0=f_1(x_0)=f_2(x_0)$ . Так як  $y_0=f_1(x_0)$ , то точка  $(x_0; y_0)$  належить графіку функції  $y=f_1(x)$ . Так як, крім того,  $y_0=f_2(x_0)$ , то точка  $(x_0; y_0)$  належить також графіку функції  $y=f_2(x)$ . Таким чином,  $(x_0; y_0)$  є точка перетину графіків функцій  $y=f_1(x)$  і  $y=f_2(x)$ .

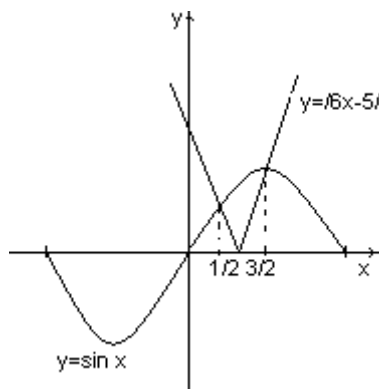
Нехай графіки функцій  $y=f_1(x)$  і  $y=f_2(x)$  перетинаються в точці  $(x_0; y_0)$ , тобто  $y_0=f_1(x_0)=f_2(x_0)$ . Це означає, що число  $x_0$  є розв'язком рівняння  $f_1(x)=f_2(x)$ . Таким чином, для знаходження розв'язків рівняння  $f_1(x)=f_2(x)$  потрібно визначити абсциси точок перетину графіків функцій  $y=f_1(x)$  і  $y=f_2(x)$ .

Такий спосіб розв'язання рівнянь називається графічним. Як правило, він не дає точного розв'язку рівняння (оскільки практично ми завжди маємо справу не з графіком, а лише з ескізом графіка), але часто це дозволяє встановити число розв'язків даного рівняння.

Графічний спосіб часто поєднується з іншими неелементарними прийомами розв'язання рівнянь та нерівностей, інколи з використанням похідних.

**Приклад 27.** Розв'язати рівняння  $|6x - 5| = 4 \sin \frac{\pi x}{3}$

**Розв'язання:** Побудувавши графіки функцій  $y = |6x - 5|$  та  $y = 4 \sin \frac{\pi x}{3}$ :



Знаходимо два кореня рівняння:  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $x_2 = \frac{3}{2}$ .

**Відповідь:**  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{2}$ .

**Приклад 28.** Розв'язати рівняння:

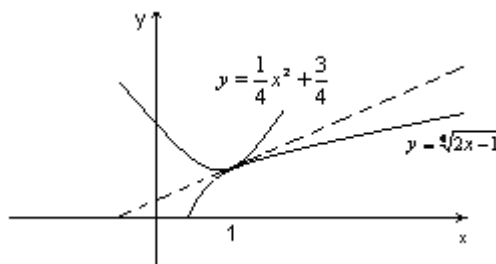
$$\sqrt[4]{2x-1} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}.$$

**Розв'язання:**

Бачимо, що  $x=1$  - корінь рівняння. Але стверджувати, що це єдиний корінь рівняння ми не можемо, оскільки і функція  $y = \sqrt[4]{2x-1}$ , і функція  $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$  зростають на області визначення рівняння, тобто на промені  $[\frac{1}{2}; +\infty)$ . У цьому випадку нам не вдається перетворити рівняння до такого виду, що одна частина представляла собою спадаючу, а інша зростаючу функцію. Вчинимо по-іншому. Знайдемо похідні функцій  $y_1 = \sqrt[4]{2x-1}$  та  $y_2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$  і обчислимо їх в точці  $x=1$  (в точці перетину графіків цих функцій).

$$\text{Маємо } y_1' = \frac{1}{4}(2x-1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2 = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x-1)^3}}; \quad y_1'(1) = \frac{1}{2}.$$

Далі,  $y_2' = x$ ;  $y_2'(1) = 1$ . Так як  $y_1'(1) \neq y_2'(1)$ , то графіки функцій  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  мають спільну точку  $(1;1)$ . Але оскільки функція  $y_1(x)$  опукла вниз, а функція  $y_2(x)$  опукла вгору, то їх графіки розміщені по різні сторони від спільної точки. Скористаємось геометричною інтерпретацією:



Отже, рівняння  $y_1(x) = y_2(x)$  має лише один корінь.  $x=1$  - єдиний корінь рівняння.

**Відповідь: 1.**

**Приклад 29.** Розв'язати нерівність  $|x| > x^2 - x$ .

**Розв'язання.** Побудуємо графіки функцій  $y=f_1(x)=|x|$  і  $y=f_2(x)=x^2-x$ .

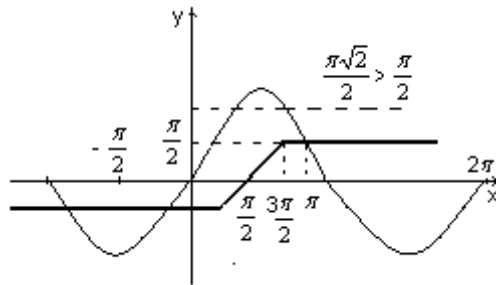
Розв'язками нерівності  $f_1(x) > f_2(x)$  є дійсні числа  $x$ , для яких графік функції  $y=f_1(x)$  розташований вище графіка функції  $y=f_2(x)$ . З мал. слідує, що розв'язками нерівності  $|x| > x^2 - x$  є всі числа  $x$  з проміжку  $0 < x < 2$ .

**Приклад 30.** Розв'язати рівняння  $\pi \sin x = \left| x - \frac{\pi}{4} \right| - \left| x - \frac{3\pi}{4} \right|$ .

**Розв'язання:**

Скористаємось графічним методом.

Побудуємо графіки функцій  $y = \pi \sin x$  та  $y = \left| x - \frac{\pi}{4} \right| - \left| x - \frac{3\pi}{4} \right|$ .



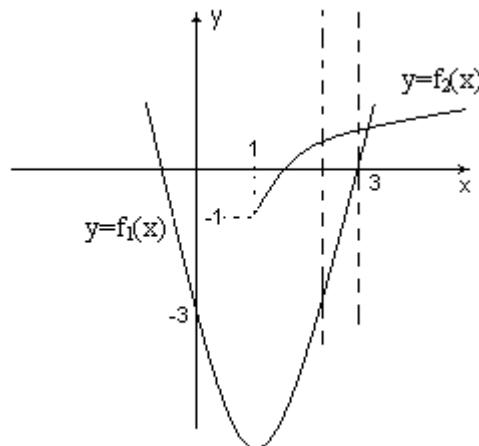
З графіків видно, що рівняння має розв'язки при  $x \leq 0$ ,  $\sin x = -\frac{1}{2}$  та при  $x \geq \pi$ ,  $\sin x = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi, k = 0, -1, -2, \dots \\ x = (-1)^l \frac{\pi}{6} + l\pi, l \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Відповідь:**  $x \in \left\{ (-1)^{l+1} \frac{\pi}{6} - l\pi; (-1)^l \frac{\pi}{6} + l\pi; \frac{\pi}{6}, l \in \mathbb{N} \right\}$ .

**Приклад 31.** Розв'язати нерівність  $(x^2 - 2x - 3)(\sqrt{x-1} - 1) < 0$ .

**Розв'язання:** Побудуємо графіки функцій  $y = f_1(x) = x^2 - 2x - 3$  і  $y = f_2(x) = \sqrt{x-1} - 1$

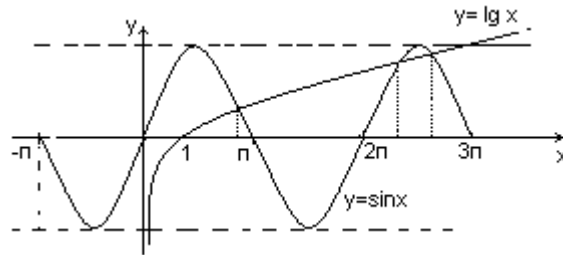


Розв'язками нерівності  $f_1(x)f_2(x)<0$  є дійсні числа  $x$ , для яких значення функції  $f_1(x)$  і  $f_2(x)$  мають різні знаки ( або  $f_1(x)<0$  і  $f_2(x)>0$ , або  $f_1(x)>0$  і  $f_2(x)<0$ ). Це означає, що потрібно знайти такі числа  $x$ , для яких точки графіків функції  $y=f_1(x)$  і  $f_2(x)$  розташовані по різні боки від осі  $x$ . Із графіків функцій слідує, що розв'язками нерівності  $(x^2-x-3)(\sqrt{x-1}-1)<0$  є всі числа  $x$  з проміжку  $2<x<3$ .

**Відповідь:**(2;3)

**Приклад 32.** Знайти число розв'язків рівняння  $\lg x = \sin x$ .

**Розв'язання:** Застосуємо графічний метод. Побудуємо графіки функцій  $y = \lg x$  та  $y = \sin x$ .



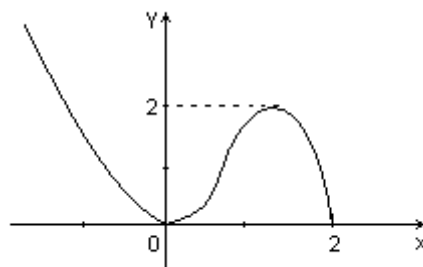
Кількість точок перетину графіків дорівнює числу розв'язків даного рівняння.

**Відповідь:** три розв'язки.

**Приклад 33:** Знайти всі значення параметра  $a$ , при яких рівняння  $\lg 2|x| + \lg(2-x) - \lg a = 0$  має єдиний розв'язок.

**Розв'язання :** З урахуванням ОДЗ рівняння еквівалентне системі:

$$\begin{cases} 2|x|(2-x) = a, \\ x < 2, \\ x \neq 0. \end{cases} \quad \text{Побудуємо графік функції } y = 2|x|(2-x):$$



Рівняння матиме єдиний розв'язок, коли пряма  $y=a$  перетне графік функції  $y = 2|x|(2-x)$  тільки один раз. Це відбудеться тоді, коли  $a>2$ .

**Відповідь:**  $a>2$ .

## V. Вправи для самостійної роботи

1. Порівняти числа  $406^{405}$  та  $405^{406}$ .
2. Розв'язати рівняння:  $x^2 + 2^{|x|} = 1$ .
3. Розв'язати рівняння:  $2 \cos \frac{x}{2} + 3 \cos 3x = 5$ .
4. Порівняти числа:  $\log_4 5$  та  $\log_5 6$ .
5. Скільки розв'язків має рівняння:  $\sin \frac{\pi x}{2} + \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right| - \frac{2}{9}(5 - 2x) = 0$ ?
6. Розв'язати рівняння  $\sqrt[10]{x} + \sqrt[10]{x+1} = \cos x$ .
7. Розв'язати рівняння  $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$ .
8. Розв'язати рівняння  $\operatorname{tg} x = \frac{2}{\pi} \left( \left| x - \frac{\pi}{4} \right| - \left| x - \frac{3\pi}{4} \right| \right)$ .
9. Розв'язати рівняння  $\sqrt{x^2 - 1} + x = 1 + \sqrt{2 - 2x^2}$
10. Розв'язати нерівність  $5^x + 12^x \leq 13^x$
11. Розв'язати нерівність:  $1 - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} + \arccos(x + |\sin y|) \leq 0$ .
12. Розв'язати нерівність:  $\frac{(2^x - 2)(|x + 1| - 2x)}{(x^2 - 3x + 2)(\sqrt{x^2 + 3} - 2x)} \leq 0$ .
13. Знайти всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння має єдиний розв'язок:  
$$4a \cos \frac{\pi x}{2} + a^2(2\sqrt{|x|} + 1) = 12.$$
14. Зобразити на координатній площині множину точок, координати яких  $(x; y)$  задовольняють рівність:  $|\sin x \sin y| = 1$ .

## **VI. Використана література**

1. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В. Математика. Лекции, задачи, решения. - М.:Альфа, 1997.-634с.
2. Вишенський В.А., Перестюк М.О. Конкурсні задачі з математики. - К.:Вища шк.,2001.-432с.
3. Горнштейн П.И., Полонский В.Б. Задачи с параметрами.-К.:Евроиндекс лтд,1995.-336с.
4. Кушнир И.А. Функции. Задачи и решения.-К.:Астарта,1996.-544с.
5. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике.-М.:Просвещение,1991.-352с.
6. Ясінський В.В. Математика. Навчальний посібник для слухачів ФДП НТУУ «КПІ».-К.:НТУУ «КПІ»,2006.-368с.